MATEMÁTICA

Dados de Catalogação na Publicação

Rooney, anne
Matemática/ Anne Rooney.
2020 – São Paulo – M.Books do Brasil Editora Ltda.

1. História da Matemática

e-ISBN: 978-65-58000-007-5

Do original: Think Like a Mathematician
Publicado originalmente pela Arcturus Publishing Limited

Editor: Milton Mira de Assumpção Filho

Tradução: Maria Beatriz de Medina
Produção editorial: Lucimara Leal
Editoração: Crontec
Capa: Isadora Mira
Conversão para epub: Cumbuca Studio

2020
M.Books do Brasil Editora Ltda.

SUMÁRIO

O que É Matemática na Verdade?

A matemática está à nossa volta. Ela é a linguagem que nos permite trabalhar com números, padrões, processos e as regras que governam o universo. Ela nos permite entender nosso ambiente e modelar e prever fenômenos. As sociedades humanas mais antigas começaram a investigar a matemática quando tentaram acompanhar os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas e construir prédios, contar rebanhos e desenvolver o comércio. Na China Antiga, na Mesopotâmia, no Antigo Egito, na Grécia e na Índia, o pensamento matemático floresceu quando as pessoas descobriram a beleza e a maravilha dos padrões feitos pelos números.

A matemática é um empreendimento global e uma linguagem internacional. Hoje, ela está por trás de todas as áreas da vida.

O comércio é construído sobre os números. Os computadores que integram todos os aspectos da sociedade funcionam com números. Boa parte das informações que nos são apresentadas diariamente é matemática. Sem um entendimento básico dos números e da matemática, é impossível saber a hora, planejar um cronograma ou até seguir uma receita. Mas isso não é tudo. Se não entender as informações matemáticas, você pode ser enganado e iludido — ou simplesmente sair perdendo.

A matemática pode ser recrutada com propósitos honrados ou nefastos. Os números podem ser usados para elucidar, explicar e esclarecer — mas também para mentir, obscurecer e confundir. É bom ser capaz de ver o que está acontecendo.

Os computadores tornaram a matemática bem mais fácil ao possibilitar alguns cálculos que antes ninguém pôde realizar. Você encontrará exemplos disso mais adiante neste livro. Vejamos o pi (símbolo π, que define a relação matemática entre a circunferência de um círculo e seu raio): agora ele pode ser calculado com milhões de casas usando computadores. Os números primos (que só são divisíveis por um e por si mesmos) agora são listados aos milhões, novamente graças aos computadores. Mas, em certos aspectos, talvez os computadores estejam deixando a matemática com menos rigor lógico.

MATEMÁTICA PURA E APLICADA

A maior parte da matemática deste livro recai na categoria de "matemática aplicada", ou seja, a matemática usada para resolver problemas do mundo real, aplicada a situações práticas do mundo, como os juros cobrados num empréstimo ou a medição do tempo e de um pedaço de barbante. Há outro tipo de matemática que interessa a muitos matemáticos profissionais, a matemática "pura". Ela é estudada, com ou sem aplicação prática, para verificar aonde a lógica pode nos levar e para entender a matemática pela matemática.

Agora que é possível processar quantidades muito grandes de dados, podemos extrair, mais do que nunca, informações muito mais confiáveis dos dados empíricos (isto é, dados observados diretamente). Isso significa que mais conclusões nossas podem se basear, aparentemente com segurança, em olhar coisas em vez de calcular coisas. Por exemplo, podemos examinar montanhas de dados sobre o clima e então fazer previsões com base no que aconteceu no passado. Para isso, não precisaríamos de nenhuma compreensão dos sistemas climáticos; simplesmente partiríamos do que já foi observado, com o pressuposto de que, sejam quais forem as forças por trás, o mesmo acontecerá no futuro com um certo grau de probabilidade. Pode até dar certo, mas na verdade não é ciência nem matemática.

Olhar primeiro ou pensar primeiro?

Há duas maneiras fundamentalmente diferentes de trabalhar com dados e conhecimentos, e assim de criar ideias matemáticas. Uma começa com o pensamento e a lógica, a outra começa com as observações.

Pense primeiro: A dedução é o processo de raciocinar com lógica usando afirmativas específicas para produzir previsões sobre casos individuais. Um exemplo seria começar com a afirmativa de que todas as crianças têm (ou tiveram) pais e com o fato de Sophie ser criança para deduzir que, portanto, Sophie tem (ou já teve) pais. Contanto que as duas afirmativas originais sejam verificadas e a lógica seja válida, a previsão será exata.

Olhe primeiro: A indução é o processo de inferir informações gerais a partir de casos específicos. Se olharmos vários cisnes e descobrirmos que todos são brancos, podemos inferir daí (como já se fez) que todos os cisnes são brancos. Mas isso não é robusto; só significa que ainda não vimos um cisne que não seja branco (ver o Capítulo 10).

Estar certo e estar errado

Os matemáticos nem sempre estão certos, quer comecem com métodos indutivos, quer com dedutivos. Mas, em temos gerais, a dedução é mais confiável e foi consagrada na matemática pura desde sua origem com o matemático grego Euclides de Alexandria.

Como pode dar errado

Nossos ancestrais achavam que o Sol orbitava a Terra, e não o contrário. Como ficaria o movimento do Sol se ele girasse em torno da Terra? A resposta é: exatamente igual.

CADÊ O PLANETA? ACHOU!

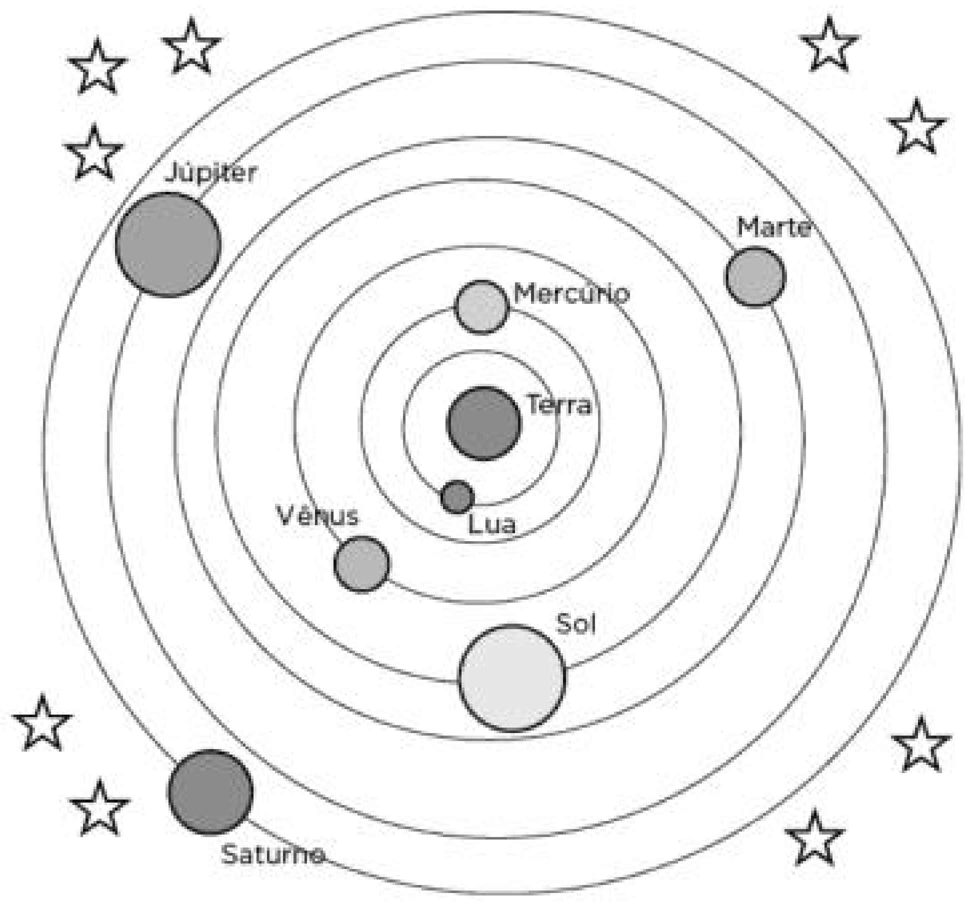
Em 1845 e 1846, os matemáticos Urbain Le Verrier e John Couch Adams previram, de forma independente, a existência e a posição de Netuno. Eles usaram a matemática depois de examinar perturbações (distúrbios) na órbita do vizinho planeta Urano. Netuno foi descoberto e identificado em 1846.

O modelo de universo construído pelo antigo astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (c. 90-168 d.C.) explicava os movimentos aparentes do Sol, da Lua e dos planetas pelo céu. Foi um método indutivo: Ptolomeu olhou os indícios empíricos (o que ele mesmo observou) e construiu um modelo que se encaixava.

Quando se tornou possível fazer medições mais exatas dos movimentos dos planetas, os astrônomos medievais e renascentistas imaginaram refinamentos ainda mais complexos da matemática do modelo geocêntrico do universo (centrado na Terra) de Ptolomeu para que se encaixasse em suas observações. O sistema inteiro virou um emaranhado horrível conforme coisas foram sendo acrescentadas para explicar cada nova observação.

A correção

Só quando o modelo foi derrubado em 1543 pelo astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico, que pôs o Sol no centro do sistema solar, a matemática começou a funcionar. Mas nem seus cálculos estavam totalmente corretos. Mais tarde, o cientista inglês Isaac Newton (1642-1726) melhorou as ideias de Copérnico e fez uma descrição dos movimentos dos planetas matematicamente coerente, que não precisa de um monte de mexidas para dar certo. Suas leis do movimento planetário foram validadas pela observação de planetas não descobertos quando ele estava vivo. A existência dos planetas foi corretamente prevista antes mesmo que eles fossem observados. Mas o modelo ainda não é perfeito; ainda não conseguimos explicar direito o movimento dos planetas externos usando o modelo matemático atual. Há mais a descobrir, tanto no espaço quanto na matemática.



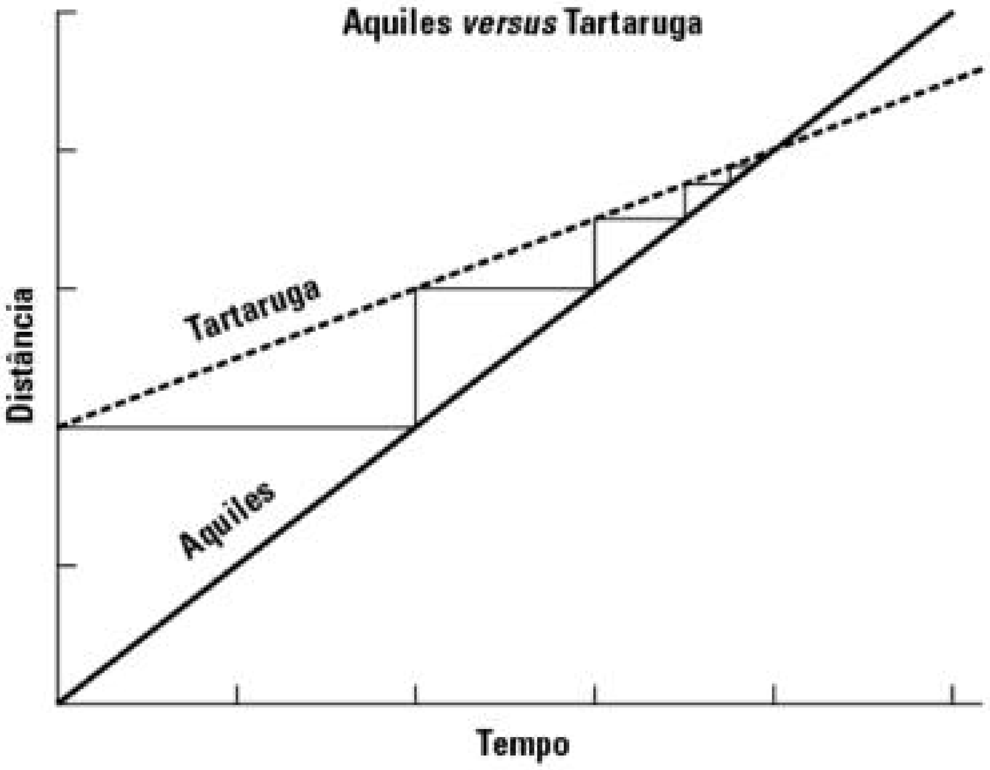
Os paradoxos de Zeno

O descompasso entre o mundo em que vivemos e o mundo modelado pela matemática e pela lógica já foi reconhecido há muito tempo.

O filósofo grego Zeno de Eleia (c. 490-430 a.C.) usou a lógica para demonstrar a impossibilidade do movimento. Seu "paradoxo da flecha" afirma que, num instante qualquer, a flecha está numa posição fixa. Podemos tirar milhões de instantâneos da flecha em todas as suas posições entre sair do arco e chegar ao alvo, e num instante infinitamente pequeno ela está imóvel. Então, quando ela se move?

Outro exemplo é o paradoxo de Aquiles e da tartaruga. Se desse uma vantagem à tartaruga numa corrida, o veloz herói grego Aquiles nunca seria capaz de alcançá-la. No tempo que Aquiles levasse para percorrer a distância até a posição original da tartaruga, esta teria se deslocado. Isso continuaria acontecendo, com a tartaruga percorrendo distâncias cada vez menores enquanto Aquiles se aproximava, mas ele nunca conseguiria ultrapassá-la.

Esse paradoxo trata a continuidade do tempo e da distância como uma série de momentos ou posições infinitesimais. Logicamente coerente, ele não combina com a realidade que vivemos.



Você Não Inventaria Isso... ou Será que Inventamos?

A matemática está por toda a parte, esperando para ser descoberta? Ou a inventamos inteiramente?

Se a matemática foi descoberta ou inventada é tema de debate desde a época do filósofo grego Pitágoras, no século V a.C.

Duas posições — se você acredita em "dois"

> ***"A matemática é a linguagem com que Deus escreveu o universo."***
> Galileu Galilei

A primeira posição afirma que todas as leis da matemática, todas as equações que usamos para descrever e prever fenômenos, existem independentemente do intelecto humano. Isso significa que o triângulo é uma entidade independente e que seus ângulos realmente somam 180°. A matemática existiria mesmo que os seres humanos nunca surgissem e continuará a existir muito depois de sumirmos. O matemático e astrônomo italiano Galileu era dessa opinião de que a matemática é "verdadeira".

Está lá, mas não podemos ver direito

O antigo filósofo e matemático grego Platão propôs, no início do século IV a.C., que tudo o que vivenciamos pelos sentidos é uma cópia imperfeita de um ideal teórico. Isso significa que todo cachorro, toda árvore, todo ato de caridade é uma versão um pouco capenga ou limitada do cachorro, árvore ou ato de caridade ideal, "essencial". Como seres humanos, não podemos ver os ideais, que Platão chamava de "formas", só os exemplos que encontramos na "realidade" cotidiana. O mundo que nos cerca tem defeitos e muda o tempo todo, mas o reino das formas é perfeito e imutável. De acordo com Platão, a matemática habita o reino das formas.

Embora não possamos ver diretamente o mundo das formas, podemos abordá-lo pela razão. Platão comparava a realidade que vivemos às sombras lançadas na parede de uma caverna por figuras que passavam diante de uma fogueira.

Se estivesse na caverna virado para a parede (acorrentado, para não poder olhar para trás, no roteiro de Platão), você só conheceria as sombras e as consideraria realidade. Mas de fato a realidade é representada pelas figuras perto da fogueira, e as sombras são um mau substituto. Platão considerava que a matemática fazia parte da verdade eterna. As regras matemáticas estão por toda parte e podem ser descobertas pela razão. Elas regulam o universo, e nossa compreensão do universo depende de descobri-las.

E se inventamos tudo?

A outra posição principal é que a matemática é a manifestação de nossa tentativa de entender e descrever o mundo que vemos à nossa volta. Segundo esse ponto de vista, a convenção de que os ângulos do triângulo somam 180° não passa disso — uma convenção, como sapatos pretos serem considerados mais formais do que sapatos cor de malva. É uma convenção porque definimos o triângulo, definimos grau (e a ideia de grau) e provavelmente também inventamos "180".

Pelo menos, se foi inventada, a matemática tem menos potencial de estar errada. Assim como não podemos dizer que "árvore" é o nome errado da árvore, não podemos dizer que a matemática inventada esteja errada — embora a má matemática talvez não esteja à altura do serviço.

Matemática alienígena

"Deus criou os inteiros. Todo o resto é obra do Homem."
Leopold Kronecker
(1823–1891)

Somos os únicos seres inteligentes do universo? Vamos supor que não, pelo menos por um momento (ver o Capítulo 18).

Se a matemática foi descoberta, quaisquer alienígenas com pendor matemático descobrirão a mesma matemática que nós, o que tornará factível a comunicação com eles. Talvez a exprimam de um modo diferente — com outra base numérica, por exemplo (ver o Capítulo 4) —, mas seu sistema matemático descreverá as mesmas regras que o nosso.

Se inventamos a matemática, não há nenhuma razão para que alguma inteligência alienígena invente a mesma matemática. Na verdade, seria até surpresa se inventassem — talvez a mesma surpresa se falassem chinês, acádio ou baleiês.

Afinal, se for simplesmente um código que usamos para nos ajudar a descrever a realidade que observamos e trabalhar com ela, a matemática é semelhante à linguagem. Não há nada que faça da palavra "árvore" um significante verdadeiro do objeto que é a árvore. Os alienígenas terão uma palavra diferente para "árvore" quando a virem. Se não houver nada "verdadeiro" na órbita elíptica de um planeta ou na matemática da ciência dos foguetes, uma inteligência alienígena provavelmente verá e descreverá os fenômenos em termos muito diferentes.

Que incrível!

Talvez seja incrível que a matemática se encaixe tão bem no mundo que nos cerca — ou talvez seja inevitável. O argumento "é incrível" na verdade não sustenta nenhum dos pontos de vista. Se inventamos a matemática, criamos algo que descreva adequadamente o mundo que nos cerca. Se descobrimos a matemática, obviamente ela será adequada ao mundo que nos cerca, já que seria "certa" de um jeito que é maior do que nós. A matemática é "tão admiravelmente adequada aos objetos da realidade" porque é verdadeira ou porque foi projetada para isso.

Cuidado! Está atrás de você!

Outra possibilidade é que a matemática pareça extremamente boa para representar o mundo real porque só olhamos os pedaços que funcionam. É parecido com ver coincidências como prova de algo sobrenatural. É, é mesmo espantoso você viajar nas férias para uma aldeia obscura na Indonésia e esbarrar com um amigo — mas só porque não está pensando em todas as vezes em que você e outras pessoas foram a algum lugar e toparam com um conhecido. Só notamos o que é notável; os eventos não notáveis não são notados. Do mesmo modo, ninguém pensa em culpar a matemática por não descrever a estrutura dos sonhos. Portanto, seria sensato coligir uma lista das áreas em que a matemática falha se quisermos avaliar seu nível de sucesso.

Como a matemática, que, afinal de contas, é um produto do pensamento humano que independe da experiência, pode ser tão admiravelmente adequada aos objetos da realidade?
Albert Einstein
(1879-1955)

"A eficácia insensata da matemática"

Se a matemática foi inventada, como explicar o fato de que partes dela, desenvolvidas sem referência a aplicações no mundo real, explicaram fenômenos reais muitas vezes décadas ou séculos depois de sua formulação?

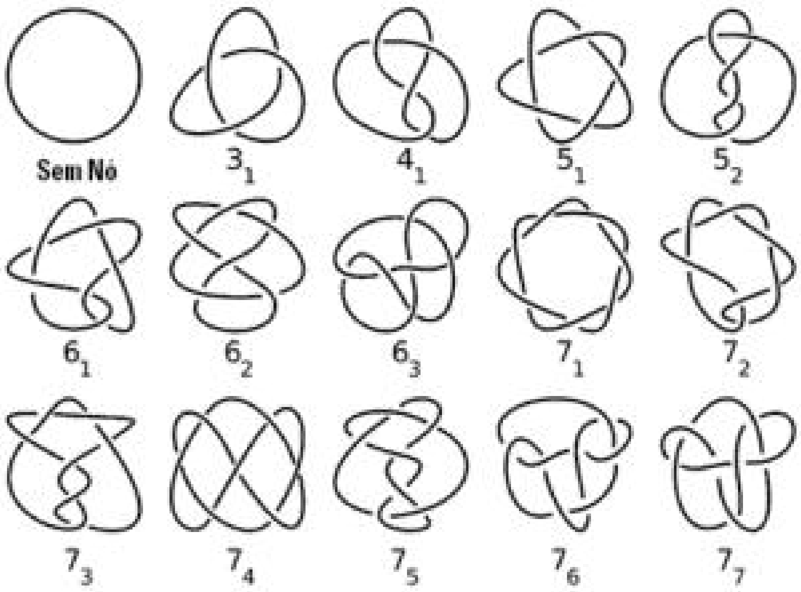
Como ressaltou o matemático húngaro-americano Eugene Wigner em 1960, há muitos exemplos de matemática desenvolvida com um propósito — ou sem nenhum propósito — que mais tarde se descobriu que descrevia com grande exatidão características do mundo natural. Um exemplo é a teoria dos nós. A teoria matemática dos nós envolve o estudo de formas complexas de nós com as duas pontas ligadas. Foi desenvolvida na década de 1770, mas hoje é usada para explicar por que os filamentos do DNA (material da herança) se soltam para se duplicar. Ainda há contra-argumentos. Só vemos o

"Como saber, se fizermos uma teoria que se concentre nos fenômenos que desdenhamos e desdenharmos alguns fenômenos que agora exigem nossa atenção, que não conseguiríamos construir outra teoria que tivesse pouco em comum com a atual mas que, mesmo assim, explicasse tantos fenômenos quanto a teoria atual?"
Reinhard Werner
(n. 1954)

que procuramos. Escolhemos as coisas a explicar e escolhemos as que podem ser explicadas com as ferramentas que temos.

Talvez a evolução tenha nos preparado para pensar matematicamente e não possamos deixar de agir assim.

Teoria dos nós: o nó verdadeiro mais simples é o trifólio, ou nó simples, no qual a corda se cruza três vezes (31 a seguir). Não há nós com menos cruzamentos. O número de nós aumenta rapidamente depois.

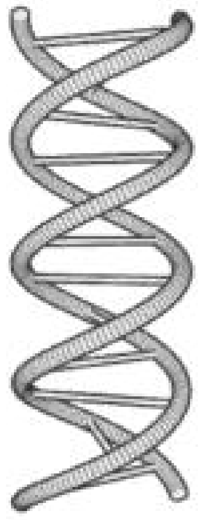


Isso importa?

Se você só trabalha com as contas da casa ou confere a conta do restaurante, não importa muito se a matemática foi descoberta ou inventada. Operamos dentro de um sistema matemático coerente que funciona. Portanto, de fato, podemos "manter a calma e continuar calculando".

Para os matemáticos puros, a questão tem interesse filosófico e não prático: eles lidam com os maiores mistérios que definem o tecido do universo? Ou brincam com um tipo de linguagem, tentando escrever os poemas mais elegantes e eloquentes que possam descrever o universo?

A "realidade" da matemática mais importa onde os seres humanos forçam as fronteiras do conhecimento e das conquistas técnicas. Se a matemática for inventada, podemos esbarrar nas limitações do sistema, e não seremos capazes de atravessá-las para responder a determinadas perguntas. Talvez nunca consigamos viajar no tempo, pular para o outro lado do universo ou criar a consciência artificial, simplesmente porque nossa matemática não está à altura da tarefa. Consideraremos impossíveis coisas que, com um sistema matemático diferente, poderiam ser perfeitamente fáceis.



Por outro lado, se a matemática foi descoberta podemos, potencialmente, descobrir toda ela e chegar à borda do possível, do que é permitido pelas leis físicas do universo. Seria bom, então, se a matemática fosse descoberta. Mas não conseguimos ter certeza.

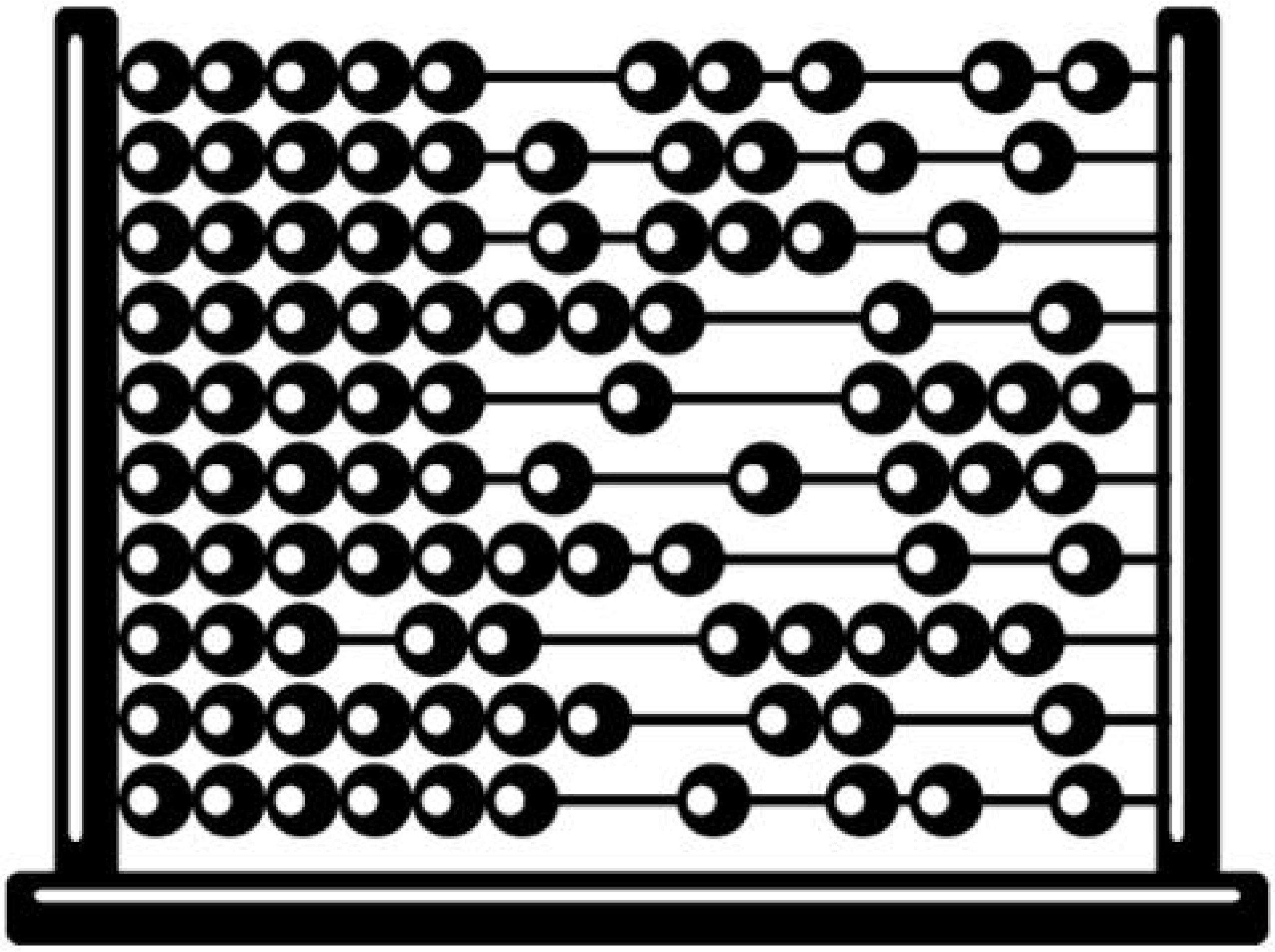
"O milagre da conveniência da linguagem da matemática para a formulação das leis da física é uma dádiva maravilhosa que não entendemos nem merecemos."
Eugene Wigner

UMA POSSIBILIDADE ASSUSTADORA

Uma possibilidade que geralmente não recebe muita consideração é que a matemática seja real mas entendemos tudo errado, assim como Ptolomeu entendeu errado o modelo do Sistema Solar. E se a matemática que desenvolvemos for equivalente ao universo geocêntrico de Ptolomeu? Poderíamos jogá-la fora e recomeçar? É difícil ver como isso seria possível, agora que já investimos tanto.

Por Que Temos Números?

O entendimento dos números veio cedo no desenvolvimento da sociedade humana.



Estamos tão acostumados com os números que raramente pensamos sobre eles. As crianças aprendem bem pequenas a contar, e os números e cores estão entre as primeiras ideias abstratas que encontram.

Conta aí!

O primeiro envolvimento humano com os números de que temos notícia foi a conferência. Nossos antigos ancestrais conferiam seus rebanhos marcando uma varinha, pedra ou osso com um corte para cada animal, ou movendo pedrinhas ou conchas de uma pilha a outra.

Conferir não exige nomes para os números; não é o mesmo que contar. É um sistema simples de correspondência que usa um objeto ou marca para representar outro objeto ou fenômeno. Se você tiver uma concha para representar cada ovelha e jogar uma concha no pote a cada ovelha que passar, é fácil ver se, no fim, lhe restam conchas, ou seja, faltam ovelhas. Você não precisa saber que deveria ter 58 ou 79 ovelhas; basta procurar as ovelhas perdidas e jogar uma concha no pote cada vez que encontrar uma delas, até não restarem mais conchas.

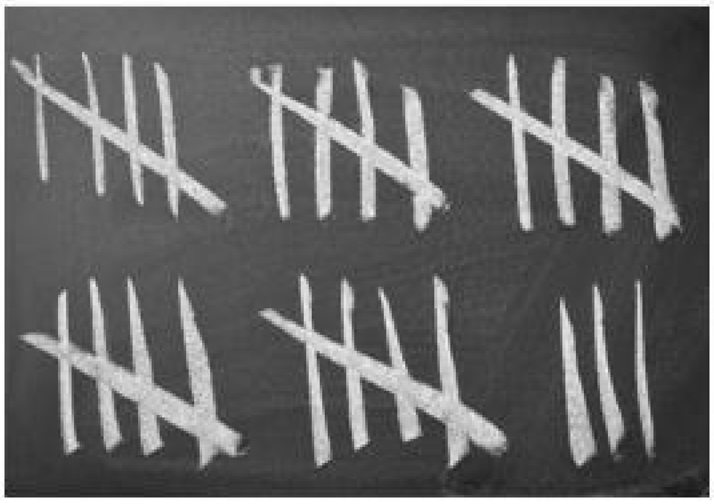
Ainda usamos conferências para acompanhar os pontos de um jogo, registrar os dias de um naufrágio e em outras circunstâncias em que o número só é necessário no fim do processo. Contar vem depois de conferir.

Contagem 1, conferência 0

A conferência foi usada por várias culturas da Idade da Pedra durante pelo menos quarenta mil anos. Então, em algum momento, ter números com nomes se tornou útil.

Não sabemos direito quando a contagem começou, mas é fácil ver que, depois que as pessoas começaram a criar animais, seria mais útil dizer "sumiram três ovelhas" do que apenas "sumiram algumas ovelhas". Se você tem três filhos e quer uma lança para cada um, é mais fácil saber que tem de fazer três lanças e depois sair para procurar três varas fortes etc. do que fazer uma lança, dar ao primeiro filho, perceber que ainda há dois filhos sem lança, fazer outra lança e assim por diante. Depois que as pessoas começaram a comerciar, os números se tornaram essenciais.

Os primeiros números escritos conhecidos surgiram no Oriente Médio, na região de Zagros, no Irã, por volta de 10.000 a.C. Sobreviveram fichas de argila usadas para contar ovelhas. O símbolo de uma ovelha era uma bola de argila com um sinal + gravado. É claro que isso é ótimo quando se tem poucas ovelhas, mas precisar de 100 símbolos para 100 ovelhas seria complicado. Eles desenvolveram fichas com símbolos diferentes para representar 10 e 100 ovelhas, e então podiam contar qualquer número de ovelhas com menos fichas — até 999 ovelhas poderiam ser representadas com apenas 27 fichas (9 × 100 ovelhas; 9 × 10 ovelhas; 9 × 1 ovelha)



As fichas eram enfiadas num cordão ou assadas dentro de uma bola oca de argila. O exterior da bola tinha gravados os símbolos que mostravam o número de "ovelhas" lá dentro, e a bola podia ser quebrada para conferir o número se houvesse alguma disputa. Esses números no exterior das bolas de contar ovelhas são o sistema numérico escrito mais antigo que nos restou.

Invenção dos números

Muitos sistemas de numeração antigos se desenvolveram diretamente a partir das conferências e usavam um símbolo repetido para as unidades, um símbolo diferente para as dezenas e outro para as centenas. Alguns tinham símbolos para o 5 ou outros números intermediários.

O sistema de numerais romanos, conhecido pelo mostrador dos relógios e as datas de copyright que aparecem no fim dos filmes, começa com os riscos verticais de um sistema de conferência. Os números 1 a 4, originalmente, eram representados como I, II, III e IIII. X é usado para o 10 e C, para o 100. Os intermediários V (5). L (50) e D (500) tornam os números grandes um pouco mais curtos. Depois de algum tempo, surgiu a convenção de pôr o I antes do V ou do X para indicar subtração, e assim IV é 5 – 1 ou 4. IV é mais curto de escrever e mais fácil de ler do que IIII. Só se pode fazer isso dentro da mesma potência de dez, portanto IX é 9, mas não se pode escrever IC para 99, tem de ser XCIX (ou 100 - 10 e 10 – 1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	II	III	IIII mais tarde IV	V	VI	VII	VIII	VIIII mais tarde IX	X
11	19	20	40	50	88	99	100	149	150
XI	XIX	XX	XL	L	LXXXVIII	XCIX	C	CXLIX	CL

Limitados pelos números

O uso de símbolos repetidos para representar unidades, dezenas e centenas extras torna os números desajeitados de escrever e dificulta a aritmética. Com um sistema como o romano de preceder um símbolo com outro a ser subtraído, não é possível nem somar apenas contando até o número total de cada tipo de símbolo: XCIV + XXIX (94 + 29) daria a mesma resposta que CXVI + XXXI (116 + 31) se só contássemos os C(s), X(s), V(s) e I(s). Embora os romanos dessem um jeito, o sistema tinha limitações claras: sua matemática era rígida demais. Todas as frações se baseavam na divisão por 12; não havia frações decimais — e você pode imaginar como seria trabalhar com conceitos complexos como as potências (ver o quadro na página 28) ou equações de segundo grau usando algarismos romanos sem símbolo para o número zero?

FRAÇÕES EGÍPCIAS

O antigo sistema de escrita egípcia usava hieróglifos (símbolos em imagens). Como no sistema romano, os egípcios usavam o acúmulo de símbolos. Também tinham uma forma de fração.

Para mostrar uma fração, o escriba egípcio desenhava o glifo de "boca" acima de um número de traços. Mas havia um problema. Esse método só permitia frações unitárias (1 sobre um número), e não era permitido repetir uma fração unitária. Ou seja, era possível representar ¾ (= ½ ¼), mas não frações como $^{7}/10$.

A exceção era $^{2}/_{3}$, representado pelo glifo de boca sobre dois traços de tamanhos diferentes.

IV^{III} = LXIV
XIIx^{II} + IVx – IX = I – I

Não surpreende que a matemática romana não tenha se desenvolvido muito.

Notação posicional

O sistema numérico indo-arábico que usamos hoje só tem nove algarismos que podem ser reutilizados *ad infinitum*. Ele se desenvolveu lentamente na Índia a partir do século III a.C. e, mais tarde, foi refinado pelos matemáticos árabes antes de ser adotado na Europa. Nesse sistema, a classe de um número é indicada pela posição, e por isso a notação é posicional. O valor do algarismo aumenta quando ele se desloca para a esquerda. Esse sistema é muito mais flexível do que o romano.

POTÊNCIAS

Um número ao quadrado é um número multiplicado por si mesmo. Por exemplo, três ao quadrado é: 3 × 3.

Também podemos escrever 3^2.

Isso é lido como "três à segunda potência" e significa que multiplicamos dois números três.

Um número ao cubo é um número multiplicado por si mesmo mais uma vez, e três ao cubo é: 3 × 3 × 3, que pode ser escrito 3^3, "três elevado à terceira potência". O número sobrescrito (o numerinho elevado) se chama potência ou expoente.

Números ao quadrado e ao cubo têm aplicações óbvias, por se relacionarem com objetos em duas e três dimensões. As potências mais altas são usadas na matemática, mas, a não ser que seja físico teórico, você provavelmente não pensará em mais dimensões no mundo real.

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
5	6	9	1

Podemos fazer um número como 5.691 combinando:

5.000(5 × 1.000)
600(6 × 100)
90(9 × 10)
1(1 × 1)

Com a notação posicional, é possível representar até números muito grandes com um número pequeno de algarismos. Compare as representações romanas e árabes:

88 = LXXXVIII
797 = DCCXCVII
3.839 = MMMDCCCXXXIX

Nada aqui: o começo do zero

A notação posicional funciona muito bem desde que haja um algarismo em cada posição. Se houver lacunas — nada na coluna das dezenas (308, por exemplo) —, como mostrá-las?

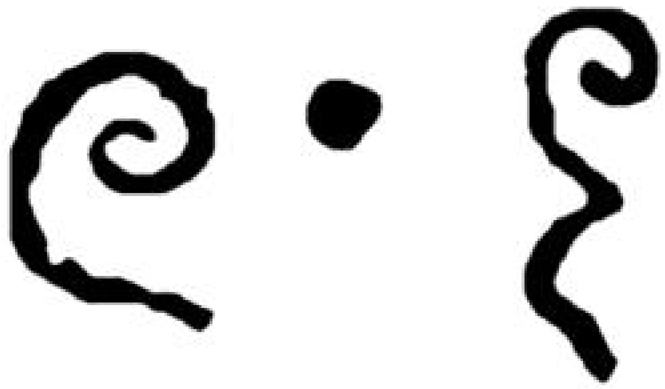
"De lugar em lugar, cada um é dez vezes o precedente."
Primeira descrição da notação posicional no método indo-arábico de contar. Ariabata, matemático indiano (476-550 d.C.)

Deixar um espaço, como faziam os chineses, pode ser ambíguo, a menos que os números se alinhem cuidadosamente em colunas: 9 2 poderia ser 902 e também 9002, e há uma grande diferença entre os dois.

Um espaço também indicava uma coluna vazia nos números indianos, mas depois ele foi substituído por um ponto ou um círculo pequeno. Este recebeu o nome sânscrito de *sunya,* que significa vazio. Por volta de 800 d.C., quando adotaram os algarismos indianos, os árabes também usaram o marcador da lacuna e também o chamaram de "vazio" ou *sifr* em árabe — origem da moderna palavra "zero".

O uso mais antigo conhecido de um símbolo para o zero em números decimais é uma inscrição cambojana em pedra, datada de 683. O ponto grande significa 0 entre os algarismos 6 e 5, para denotar 605.

"Os nove algarismos indianos são: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1. Com esses nove algarismos e com o signo 0 [...] qualquer número pode ser escrito."
Fibonacci,
Liber Abaci (1202)



Os algarismos indo-arábicos chegaram à Europa por volta do ano 1000 d.C., mas vários séculos se passaram até serem universalmente adotados. O matemático italiano Leonardo Bonacci, mais conhecido hoje como "Fibonacci", promoveu seu emprego já no século XIII, mas os mercadores continuaram usando os algarismos romanos até o século XVI.

image
not
available

para completar o rebanho. Mas no comércio surgiu a necessidade de indicar dívidas. Se você tomasse 100 moedas emprestadas, o seu saldo seria de –100; se pagasse 50, o saldo ficaria – 50. Os números negativos foram usados com esse propósito na Índia desde o século VII d.C.

O primeiro uso conhecido dos números negativos é ainda mais antigo. No século III, o matemático chinês Liu Hui criou regras para a aritmética com números negativos. Ele usou varas de contagem de cores diferentes, uma para os ganhos, outra para as perdas, que chamou de positiva e negativa. A vara vermelha era para os números positivos e a preta, para os negativos — o contrário da convenção da contabilidade moderna.

Contar e medir

Embora muitas coisas possam ser contadas, nem todas podem ser contadas facilmente, e algumas não podem ser contadas de jeito nenhum. Na natureza, talvez haja mais coisas que não podem ser facilmente contadas.

Podemos contar pessoas, animais, plantas e um número pequeno de pedras ou sementes. Mas, embora em teoria possamos contar os grãos de trigo da colheita ou o número de árvores na floresta ou de formigas no formigueiro, é improvável conseguirmos. Essas são coisas que provavelmente mediríamos. Os seres humanos começaram a medir os cereais por peso ou volume há muito tempo. Algumas coisas só podem ser medidas dessa maneira: medimos o volume dos líquidos, o peso (ou a massa) das pedras e a área da terra (ver o Capítulo 15).

Ainda mais distante da contagem estão as escalas de medida arbitrárias, como a temperatura. As escalas mostram outro uso dos números negativos. A não ser que a escala comece em algum tipo de zero absoluto, o número negativo será útil. Os termômetros, sem dúvida, precisam de números negativos, tanto em graus Celsius quanto Fahrenheit. Os números negativos são necessários nos vetores (quantidades que também incluem sentido), porque exprimimos um sentido como positivo e o sentido oposto, como negativo. Se girarmos 45° no sentido horário, temos uma rotação positiva, mas se voltarmos 30°, será uma rotação de –30°. Os íons (partículas com carga elétrica) podem ter carga positiva ou negativa, e a carga que têm indica como reagirão com outras substâncias. Você pode encontrar números negativos cotidianamente, em circunstâncias como:

- Piso –1 num elevador: um piso abaixo do nível da rua, que é considerado zero.
- Um time de futebol com saldo negativo de gols — sofreu mais gols do que marcou.
- Altitude negativa, indicando que uma localização geográfica está abaixo do nível do mar.
- Inflação negativa (deflação), que mostra que os preços no varejo estão caindo.

image
not
available

image
not
available

Se os polvos se tornassem a espécie dominante, talvez contassem na base 8 (sistema octal). Na verdade, como são criaturas inteligentíssimas, podem mesmo contar na base 8, até onde sabemos.

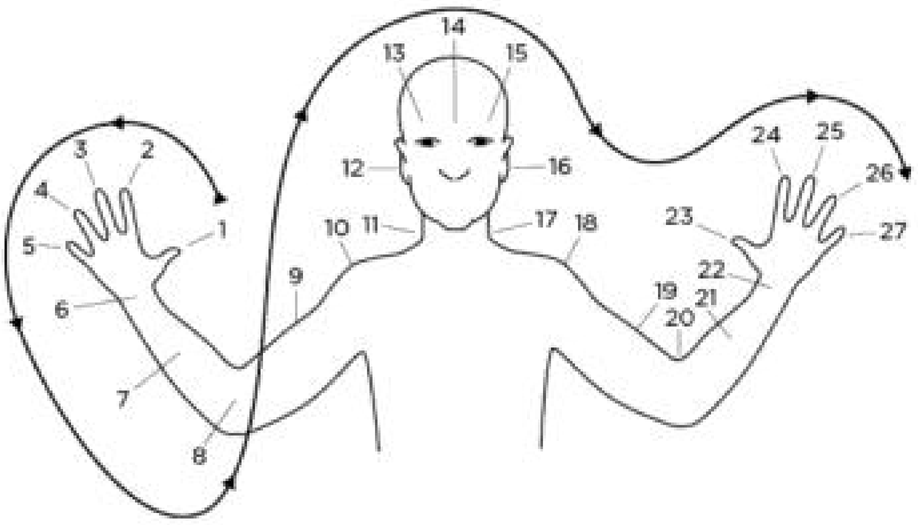
Base 8 — contagem de polvo									
0	1	2	3	4	5	6	7	10	11
Base 10 — contagem de seres humanos									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10, 20, 60 ...

Nem precisamos mudar de espécie para ver bases diferentes em ação. Os babilônios trabalhavam com a base 60 (ver o Capítulo 6), e os maias usavam a base 20.

Os sistemas de contagem 1-2 usam a base 2 (ver a página 46). Usamos a base 12 em alguns sistemas de medição (12 polegadas num pé, 12 *pence* num xelim antigo, 12 ovos numa dúzia). Começar com o corpo humano também não significa que tenhamos de chegar à base 10.

Os oksapmin da Nova Guiné usam a base 27, derivada da contagem de partes do corpo, começando com o polegar de uma das mãos, subindo pelo braço até a cabeça e descendo pelo outro lado até a outra mão (ver a imagem abaixo).



Contagem no computador

Não usamos a base 10 para tudo. Muitas tarefas de computação usam a base 16, chamada de hexadecimal. Como não temos algarismos para números acima de 9, as primeiras letras do alfabeto são cooptadas para representar os números 10 a 15 em hexadecimal.

Base 10 — contagem de seres humanos																
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Base 16 — contagem de computador nº 1																
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

número com uma fração decimal infinita), que começa com 2,718281828459...

Tudo sobre e

O número chamado "e", ou número de Euler, é definido pelos matemáticos com a seguinte expressão assustadora:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Na verdade, é muito simples. Tudo isso significa:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \ldots$$

e assim vai, até o infinito. O começo da sequência corresponde a:

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$$

$$= 1 + 1 + 0,5 + 0,1666\ldots + 0,4166\ldots$$

$$= 2,70826\ldots$$

O logaritmo natural é indicado como $\log_e$ ou 1n. Assim, $\log_e(n)$ é a potência à qual temos de elevar e para obter o número n:

$$e^{1,6094} = 5$$

logo

$$\log_e(5) = 1,6094$$

Talvez pareça inútil, mas isso é muito usado para calcular coisas como juros compostos. A fórmula para calcular juros compostos de um depósito de 1 dólar/libra/euro/real a uma taxa de juros anual R durante t anos é e^{Rt}. Se você investiu o dinheiro durante cinco anos a juros de 4%, depois desse prazo terá $e^{0,04 \times 5} = e^{0,2} = 1,22$. Se investiu 10 dólares/libras/euros/reais, terá:

$$10e^{0,04 \times 5} = 10e^{0,2} = 12,21$$

(O 0,01 a mais é apenas o próximo algarismo da resposta, que tem mais casas decimais do que podemos usar no dinheiro.)

USOS DE e: ARRANJE EMPREGO!

Em 2007, o Google espalhou cartazes em algumas cidades americanas dizendo:

"{primeiro número primo de 10 algarismos encontrado em algarismos consecutivos de e}.com"

Resolver o problema e digitar o endereço (7427466391.com) levava a um problema ainda mais difícil, e resolvê-lo levava à página do Google Labs, que convidava o geninho visitante a se

Euler, tolamente, demonstrou desdém pela ideia de Goldbach. No fim das contas, embora Goldbach tentasse com muitos números e desse certo, ele não conseguiu provar sua conjetura. Na matemática, não basta que algo dê certo com todos os números que você tentar; é preciso haver provas.

A conjetura de Goldbach continua sem prova até hoje. Os computadores a testaram até 4×10^{18} (4.000.000.000.000.000.000), mas isso ainda não basta. E se houver um valor, por volta de $10^{2.000.000}$, para o qual não seja verdadeira? Teríamos sido levados enganosamente a considerá-la um teorema quando não era. E, embora o número $10^{2.000.000}$ não tenha nenhum uso prático, pois não existe nada com esse número no universo, isso é importante. Embora nunca seja suficiente para provar, experimentar pode servir para refutar (ver o Capítulo 10). Por essa razão, as várias tentativas não são um esforço desperdiçado.

Tudo é conjetura...

Na matemática, um teorema é uma declaração que pode ser provada. Se você não tiver provas de sua ideia — essa ideia pode ser um palpite, talvez algo sustentado por muitos exemplos — só é possível afirmar que seja uma conjetura. Mais tarde, se achar a prova, você pode promovê-la a teorema. Se outra pessoa achar a prova, geralmente dará seu nome ao teorema, mesmo que tenha sido pensado séculos antes.

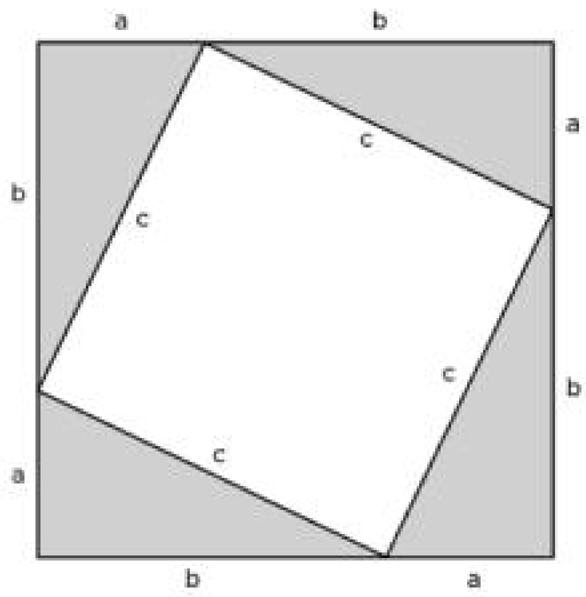
Fermat conseguiu um truque elegante com seu chamado "último teorema" (ver o quadro abaixo), em que disse que tinha a prova, mas não espaço para escrevê-la. Quando a prova foi finalmente descoberta pelo matemático inglês Andrew Wiles, em 1993, o nome "último teorema de Fermat" continuou a ser usado porque Fermat afirmara ter a prova dele (e, de qualquer modo, o teorema ficou muito famoso com esse nome).

Como saber se ele tinha a prova? Talvez só não quisesse que fosse apenas uma conjetura.

O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

Em 1637, Pierre de Fermat rabiscou o seu "último teorema" na margem de um exemplar da *Aritmética* do matemático grego Diofanto. Ele afirma que não há três inteiros *a*, *b* e *c* (diferentes de 0) que possam satisfazer a equação an + bn = cn para qualquer valor inteiro de n maior do que 2.

Isso significa que, embora possamos escrever, digamos, $3^2 + 4^2 = 5^2$ (9 +16 = 25), não podemos fazer o mesmo com nenhuma potência maior do que 2. Fermat anotou que tinha a prova, mas que ela não cabia na margem e, por isso, não a escreveu.



Primeiro, desenharemos um quadrado usando quatro triângulos iguais, em cinza à direita.

Os ângulos retos dos triângulos se tornam os vértices do quadrado. Portanto, agora temos um quadrado grande com um quadrado menor dentro. Talvez você já veja imediatamente a prova, só de olhar a ilustração. Cada lado do quadrado grande é dado por a + b, e assim a área toda do quadrado grande é:

$$A = (a + b)(a + b)$$

A área de cada triângulo pequeno é:

$$\frac{1}{2} \times ab$$

A área do quadrado no meio é:

$$c^2$$

Assim, temos duas maneiras de escrever a área do quadrado todo:

$$A = (a + b)(a + b)$$

e

$$A = c^2 + 4 \times (\frac{1}{2} \times ab)$$

Expandindo as duas expressões, temos:

$$A = a^2 + 2ab + b^2$$

e

$$A = c^2 + 2ab$$

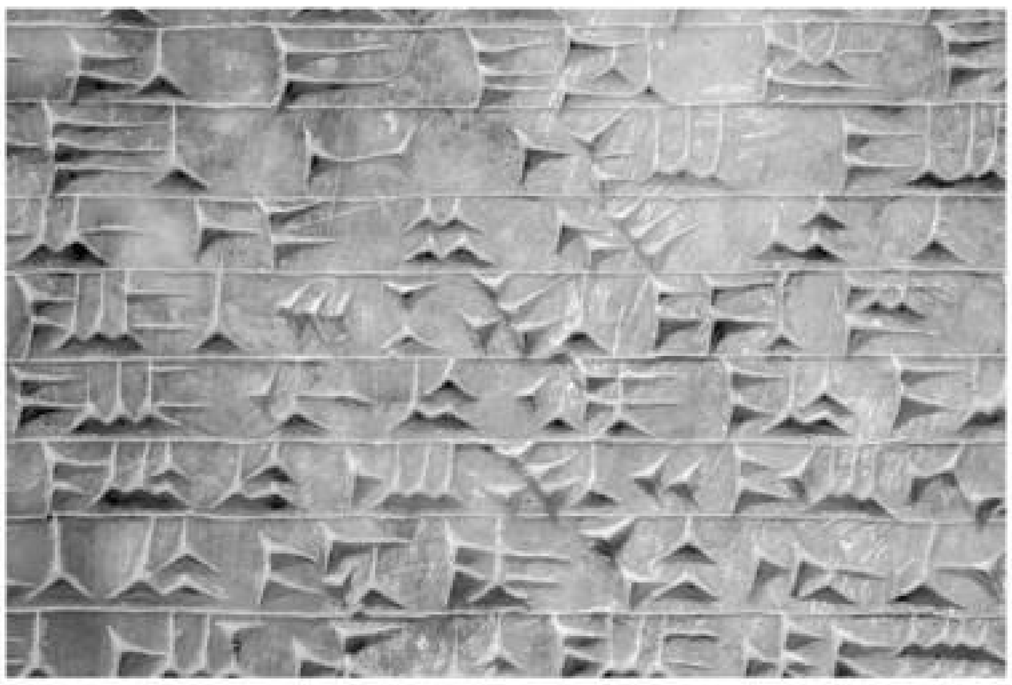
Portanto, podemos escrever:

$$A = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Tirando o 2ab dos dois lados:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Surpresa! Ou, mais formalmente, CQD (como queríamos demonstrar).



Segundos e minutos

A divisão da hora em 60 minutos e do minuto em 60 segundos vem do sistema numérico babilônico, embora os babilônios não pudessem medir o tempo com exatidão. Há 360 graus no círculo. Os graus, por sua vez, se dividem em 60 minutos, e estes em 60 segundos. Seria dificílimo expurgar o 60 de nossos sistemas agora, quatro mil anos depois. Ele está até entrando em sistemas novos que estariam além das fantasias mais loucas dos babilônios. A extensão do universo observável é medida em gigaparsecs (ver o Capítulo 15). A definição de parsec se baseia na divisão dos ângulos em 360° e as subdivisões de 60 minutos e 60 segundos.

Por que 60?

Sessenta é um número útil como base porque tem muitos fatores (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30). Um fator importante é 12 ($60 = 12 \times 5$), e os babilônios também o usavam muito. O que os babilônios (e, antes deles, os sumérios) começaram, os antigos egípcios continuaram. Eles dividiram o dia em doze horas — doze diurnas e doze noturnas. As horas tinham duração diferente nas várias estações do ano, pois o período de luz era dividido em doze partes iguais, e o período de escuridão em outras doze partes iguais (geralmente diferentes das primeiras).

Foram os antigos gregos que pensaram primeiro em ter horas de duração igual, mas suas ideias só pegaram mesmo na Idade Média, com o advento dos relógios mecânicos. Para os babilônios, que moravam bem perto do Equador, as horas não tinham duração muito diferente no decorrer do ano. Talvez se vivessem na Finlândia os babilônios tivessem escolhido horas iguais desde o princípio.

Os minutos e segundos foram adotados em 1000 d.C. pelo polímata árabe al-Biruni. O segundo foi definido como $^{1}/_{86.400}$ do dia solar médio. Mas não era possível medir o tempo com exatidão naquela época, e os minutos e segundos não foram relevantes para a maioria das pessoas durante muitos séculos.

Tempo e espaço

1776			

Isso dá uma ideia de quanto é um trilhão, mas os trilhões são bem pequenos na tabela dos números grandes.

Poupar papel

Escrever números compridos — até mesmo bilhões e trilhões, coisa que economistas e banqueiros fazem todo dia — consome rapidamente área nobre de papel ou tela. Os números grandes também não são muito fáceis de ler; é preciso contar os algarismos antes de saber como chamar o primeiro deles. É fácil ver que o número seguinte é 2 bilhões:

2.000.000.000

Mas você conseguiria ler o número abaixo em voz alta sem parar para contar algarismos?

234.168.017.329.112

A notação científica facilita escrever números grandes. Em vez de escrever 1.000.000 para um milhão, escrevemos 10^6, ou dez elevado à sexta potência. Isso significa, simplesmente, 10 multiplicado 6 vezes por si mesmo:

10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10

10 × 10 = 100
100 × 10 = 1.000
1.000 × 10 = 10.000
10.000 × 10 = 100.000
100.000 × 10 = 1.000.000

Portanto, 10^6 é 1 seguido de seis zeros. Um bilhão é 10^9, ou 1 seguido por nove zeros. E um trilhão é 10^{12} — que é muito mais fácil de ler e escrever do que 1.000.000.000.000!

ilhões e [n]ilhões

O trilhão está bem longe do fim dos "ilhões". Temos:

Quatrilhão 10^{15}
Quintilhão 10^{18}
Sextilhão 10^{21}
Septilhão 10^{24}
Octilhão 10^{27}
Nonilhão 10^{30}
Decilhão 10^{33}
Undecilhão 10^{36}
Duodecilhão 10^{39}
Tredecilhão 10^{42}
Quattuordecilhão 10^{45}
Quindecilhão 10^{48}
Sexdecilhão 10^{51}
Septendecilhão 10^{54}
Octodecilhão 10^{57}

A princípio, parece que o universo é infinito ou limitado. Se for limitado, com certeza não poderá conter nada infinito, não é? Pois é, pode. Mas antes vamos examinar o infinito com um pouco mais de detalhe.

Números intermináveis

Se você perguntar à maioria das pessoas o que é o infinito, elas pensarão na torrente interminável de números que começa com 1, ou talvez 0, e passa por 1.000.000, gugol, gugolplex e continua avançando. Sempre podemos acrescentar mais "1", sempre transformar 1 em 9, sempre multiplicar o número por si mesmo; não há fim.

Tudo isso é verdade. Mas não há apenas uma infinidade de números que começam no 0 e vão aumentando; também há uma infinidade de números negativos — isto é, números que começam no 0 e vão diminuindo.

Quantos infinitos?

Caso isso não baste, também há uma infinidade de frações (1 sobre gugol etc.) e uma infinidade de frações decimais (0,1, 0,11 etc.). Assim que chegar a 0,1111 rumo ao infinito você vai perceber que haverá 0,121111 até o infinito e assim por diante, portanto há muitos infinitos entre 0 e 1. Há outros tantos infinitos entre 1 e 2 e entre 0 e –1. Inevitavelmente, há uma infinidade de infinitos.

Qual o tamanho do infinito?

É uma pergunta conhecida das crianças curiosas: qual é o tamanho do infinito? Isso assume uma nova dimensão de complexidade depois que começamos a pensar em múltiplos (infinitos) do infinito. O bom senso nos diz que a infinidade de números pares deve ter metade do tamanho da infinidade de todos os inteiros e ser igual à infinidade dos números ímpares. Mesmo assim, todos eles crescem para sempre. Há um infinito entre cada par de números da reta numérica e uma infinidade de algarismos em cada número irracional. Mas é claro que o infinito entre 1 e 2 não pode ser do mesmo tamanho que o infinito entre o infinito negativo e o positivo, não é? A descoberta espantosa de que há infinitos maiores e menores foi demonstrada por Georg Cantor em 1874 e, novamente, em 1891.

DE 1.000 AO INFINITO

Até 1655, o símbolo ∞ do infinito era usado como alternativa ao M para representar milhares em algarismos romanos. Sua adoção como símbolo do infinito foi sugerida pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703).

Estatísticas São Mentiras, Mentiras Deslavadas ou Coisa Pior?

Deveríamos ser capazes de confiar na estatística, mas o modo como a apresentam é pensado para manipular.

Maçãs e laranjas

É difícil comparar estatísticas à primeira vista quando os números são apresentados de maneira diferente. As notícias nos meios de comunicação costumam fazer isso — talvez para nos confundir, mas talvez só porque o jornalista achou que ficaria mais variado. Comparar informações de fontes diferentes costuma provocar esse problema, mas isso ainda é coisa de preguiçoso; o jornalista deveria deixá-las comparáveis. Por exemplo, é difícil entender uma notícia que diz que 2 em cada 10 pessoas fazem exercícios suficientes para reduzir em 30% o risco de cardiopatia, e outro terço das pessoas faz exercícios suficientes para reduzir o risco em 15%. Isso nos exige pensar nos números de três maneiras diferentes: 2 em 10, frações e percentagens. Os dados ficariam muito mais claros se os números fossem todos convertidos para percentagens: 20% das pessoas fazem exercícios suficientes para reduzir o risco em 30% e mais 33% das pessoas reduzem o risco em 15%. Isso também facilita ver que 47% das pessoas não se exercita o suficiente:

$$100 - (20 + 33) = 100 - 53 = 47$$

PROVAVELMENTE, NÃO...

Há correlações entre:

- **venda de alimentos orgânicos e diagnósticos de autismo.**
- **uso do Facebook e a crise da dívida grega.**
- **a importação de limões mexicanos e a taxa de mortes nas estradas americanas — é uma correlação inversa: as mortes caem e a importação de limões cresce.**
- **o declínio do número de piratas e o aumento do aquecimento global — essa também é uma correlação inversa; será que os piratas impedem o aquecimento global?**

Isso significava que o ângulo no centro da Terra (que ele supunha esférica) entre linhas traçadas de Siena e Alexandria até lá seria igual ao ângulo da sombra lançada pela torre. A razão

círculo completo: ângulo medido

seria igual à razão

circunferência da Terra: distância entre Siena e Alexandria

Eratóstenes conhecia a distância entre as duas cidades. Infelizmente, não sabemos exatamente o que ele sabia; ele diz que a distância era de cinco mil "estádios", mas não sabemos exatamente o tamanho de cada "estádio".

Por sorte, 7,2° representa $^1/_{50}$ do círculo (360 ÷ 7,2 = 50) Isso dava uma circunferência de 5.000 × 50 = 250.000 estádios.

Eratóstenes pode ter acertado com uma diferença de cerca de 1% da circunferência real ou, se usou estádios com outra medida, pode ter errado em 16%. Mesmo assim, seu cálculo é muito bom. Usando seu cálculo do ângulo e da distância real entre as cidades, 800 km, a resposta que temos para a circunferência é

50 × 800 km = 40.000 km

A circunferência real da Terra é de 40.075 km.

Abandonado

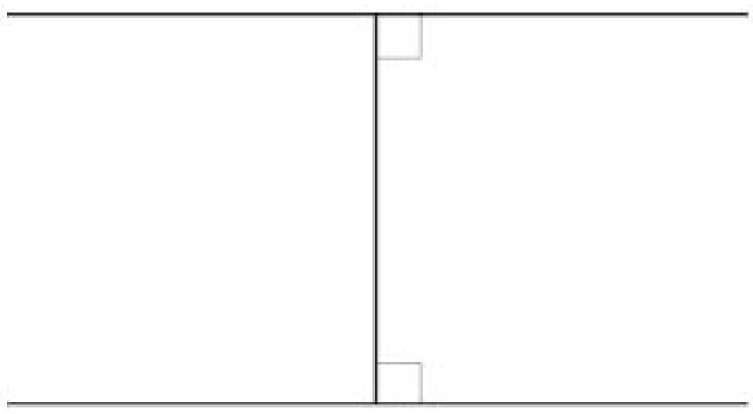
Assim, se fosse abandonado em outro planeta, você teria duas maneiras de descobrir seu tamanho. Para usar o método de Eratóstenes, você precisaria encontrar um lugar onde o sol não lançasse sombras ao meio-dia e outro lugar a uma distância factível onde lançasse sombra ao meio-dia; então, seria preciso medir o ângulo da sombra, como ele fez. É claro que você talvez não tenha levado um transferidor, e esse método pode ser complicado. Uma alternativa seria medir a distância até o horizonte.

Para usar o método da distância até o horizonte, você precisaria medir, talvez contando os passos, até onde conseguiria se afastar de um objeto antes que ele sumisse no horizonte. Há uma equação que ajuda a calcular a que distância conseguimos ver diferentes alturas:

$$d^2 = (r + h)^2 - r^2$$

onde d é a distância que você consegue ver, r é o raio do planeta e h, a distância entre seus olhos e o chão (considerando-se todas as distâncias na mesma unidade).

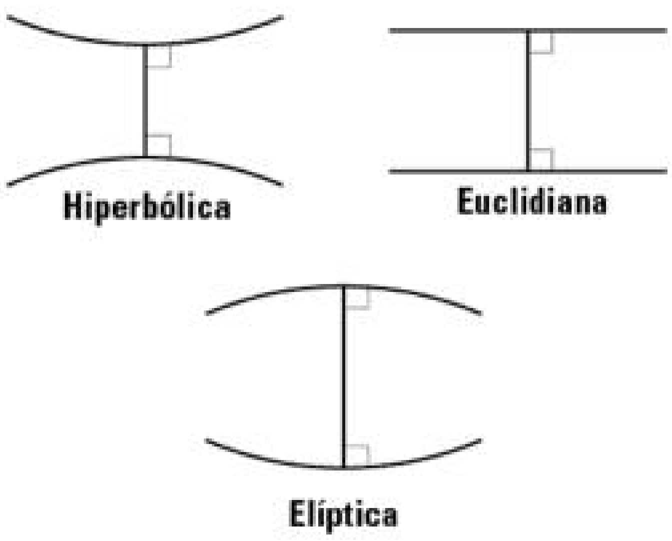
O quinto postulado de Euclides (ver a página 59) demonstra que linhas paralelas nunca se cruzam e mostra as características das linhas que se cruzam. A linha que cruza duas linhas é perpendicular (faz ângulo reto) a ambas se as duas forem paralelas:



Isso é verdade numa superfície plana, mas não numa superfície curva.

Há dois tipos de superfície curva: a côncava, como o interior de uma vasilha, e a convexa, como o exterior de um globo. Isso nos dá dois tipos de geometria de superfícies curvas. São as chamadas geometria hiperbólica e elíptica.

Agora podemos traçar uma linha perpendicular a duas outras linhas sem que estas linhas sejam paralelas. Numa superfície hiperbólica, as linhas se curvam para longe uma da outra em ambas as direções, e a distância entre elas aumenta. Na superfície elíptica, elas se curvam uma na direção da outra e acabarão se cruzando em ambos os lados.



Em linha reta

Estamos acostumados a pensar nas distâncias geográficas como sendo mais curtas "em linha reta". Isso pode ser desenhado no mapa como uma linha reta.